EXERCICE N°3 : 35' 5 points

Soit f la fonction définie sur [-1 , 1[par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat.

2) Etudier les variations de f. Déduire que f réalise une bijection de [-1,1[sur un intervalle J à préciser.

3) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. Construire les courbes de f et f^{-1}.

4) Soit g la fonction définie sur $]-\pi/2 , \pi/2[$ par $g(x) = f(\sin x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\pi/2 , \pi/2[$ et montrer que $g'(x) = \frac{1}{1-\sin x}$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $]-\pi/2 , \pi/2[$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $g^{-1}(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}(1/x)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = 0$.

EXERCICE N°4 : 35' 5 points

Soit f la fonction définie sur [0 , π[par $f(x) = 1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de [0 , π[sur un intervalle J que l'on précisera. On pose $g = f^{-1}$. Calculer g(0).

2) Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$, $g'(x) = \frac{-2}{1+(1-x)^2}$.

3) Soit φ la fonction définie sur $]-\infty , 1[$ par $\varphi(x) = g\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $]-\infty , 1[$ et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire que pour $x \in]-\infty , 1[$, $g\left(\frac{x}{x-1}\right) = \pi - g(x)$.

4) On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g\left(\frac{1}{k}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g\left(\frac{1}{1-k}\right)$.

a) Montrer que $g\left(\frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq g\left(\frac{1}{2n}\right)$. Déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

b) Montrer que $u_n + v_n = \pi$ et déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn